第43講　総合問題⑾

1　円に内接する四角形 ABCD があり，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3\sqrt{3}$，$CD=DA=\sqrt{7}$，$\angle ABC=60^\circ$ を満たしている．また，点 A と点 C を線分で結び，三角形 ABC の内接円の中心を I，その内接円と辺 BC との接点を E とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　IE，CE を求めよ．

(2)　点 I と点 D を線分で結ぶとき，ID を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 x，y が条件　$x^2+xy+y^2=6$　を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の最大値，最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1)　整数からなる公差１の等差数列 a, b, c, d で　$a^3+b^3+c^3=d^3$　を満たすものを求めよ．

(2)　0 でない整数からなる等比数列 a, b, c, d で　$a^3+b^3+c^3=d^3$　を満たすものは存在しないことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　総合問題(11)

$\{a_n\}$ は，初項 $a_1=-1$，公差 d の等差数列で，$\{b_n\}$ は，初項 $b_1=2011$，公比 r の等比数列とする．ただし，$d\neq 0$，$r\neq 0$　とする．これらの数列が
$a_nb_{n-1}+3b_na_{n-1}-2b_{n-1}=0$（$n\geqq 2$）を満たしている．次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項は　$a_n=$ ア $n-$ イ，　$b_n=2011\cdot\left(-\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}\right)^{n-1}$ である．

(2)　$|b_n|<|a_n|$ となる最小の n の値は　$n=$ オ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　総合問題⑾

1　円に内接する四角形 ABCD があり，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3\sqrt{3}$，$CD=DA=\sqrt{7}$，$\angle ABC=60°$ を満たしている．また，点 A と点 C を線分で結び，三角形 ABC の内接円の中心を I，その内接円と辺 BC との接点を E とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　IE，CE を求めよ．

(2)　点 I と点 D を線分で結ぶとき，ID を求めよ．

(1)　$IE=r$ とする．△ABC で余弦定理より

$AC^2=3+27-2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\cos60°=21$　　$AC=\sqrt{21}$

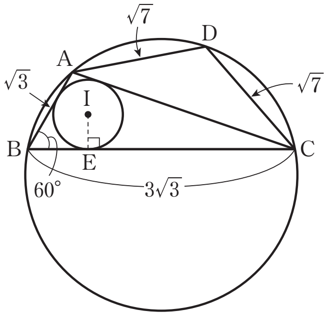
よって，△ABC の面積について

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\sin60°=\frac{1}{2}r(\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\sqrt{21})$$

$$(4\sqrt{3}+\sqrt{21})r=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\frac{9}{2(4+\sqrt{7})}=\frac{9(4-\sqrt{7})}{2\cdot9}=\frac{4-\sqrt{7}}{2}$$

よって　$\mathbf{IE=\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$



内接円と辺CA の接点を F とし，$CE=CF=x$ とおくと

$BE=3\sqrt{3}-x$　　$AF=\sqrt{21}-x$

$AB=BE+AF$　より　$\sqrt{3}=3\sqrt{3}-x+\sqrt{21}-x$　　よって　$\mathbf{CE=x=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{2}}$

(2)　トレミーの定理より　$AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot3\sqrt{3}=\sqrt{21}\cdot BD$　　　よって　$BD=4$

内心の性質より　$\angle IBE=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$

また，$\cos\angle DBC=\frac{16+27-7}{2\cdot4\cdot3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　より　$\angle DBC=30°$

よって B，I，D は一直線上にある．

$BI=2r=4-\sqrt{7}$　　　$DI=BD-BI=\mathbf{\sqrt{7}}$

2　実数 x，y が条件　$x^2+xy+y^2=6$　を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の最大値，最小値を求めよ．

$x^2+xy+y^2=6$　より　$(x+y)^2-xy=6$

$x+y=s$，$xy=t$　とおくと　$s^2-t=6$　　よって　$t=s^2-6$　……①

また，x，y は２次方程式　$x^2-sx+t=0$　の２解．これが実数より　$s^2-4t\geqq0$

①より　$s^2-4(s^2-6)\geqq0$　　$s^2\leqq8$　　よって　$-2\sqrt{2}\leqq s\leqq2\sqrt{2}$　……②

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

このとき　$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$

$=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)$

$=ts-s^2+s$

$=(s^2-6)s-s^2+s$

$=s^3-s^2-5s$

s	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(s)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(s)$	$-8-6\sqrt{2}$	↗	極大 3	↘	極小 $-\frac{175}{27}$	↗	$-8+6\sqrt{2}$

$f(s)=s^3-s^2-5s$　とおくと

$f'(s)=3s^2-2s-5=(3s-5)(s+1)$

ここで　$-\frac{175}{27}=-6.\cdots\cdots$　より　$-8-6\sqrt{2}<-\frac{175}{27}$

$-8+6\sqrt{2}-3=-11+6\sqrt{2}=-\sqrt{121}+\sqrt{72}<0$　より　$-8+6\sqrt{2}<3$

よって　**最大値　3　　最小値　$-8-6\sqrt{2}$**

3　(1)　整数からなる公差 1 の等差数列 a, b, c, d で　$a^3+b^3+c^3=d^3$　を満たすものを求めよ.

(2)　0 でない整数からなる等比数列 a, b, c, d で　$a^3+b^3+c^3=d^3$　を満たすものは存在しないことを示せ.

---

(1)　$a=b-1$, $c=b+1$, $d=b+2$　とおく.

$a^3+b^3+c^3=d^3$　より　$(b-1)^3+b^3+(b+1)^3=(b+2)^3$

$b^3-3b^2-3b-4=0$　　$(b-4)(b^2+b+1)=0$　　b は実数より　$b=4$　のみ

したがって　**$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 4,\ 5,\ 6)$**

(2)　$b=ar$, $c=ar^2$, $d=ar^3$　($a\neq0$,　$r\neq0$, r は有理数) とおく.

$a^3+b^3+c^3=d^3$　が成り立つとすると

$a^3+a^3r^3+a^3r^6=a^3r^9$　　$a\neq0$ より　$r^9-r^6-r^3-1=0$

$r^3=t$　とおくと　$t^3-t^2-t-1=0$

ここで　t が有理数であるとすると　$t=\frac{m}{n}$ (m, n は互いに素の整数, $n>0$) とおける.

このとき　$\left(\frac{m}{n}\right)^3-\left(\frac{m}{n}\right)^2-\left(\frac{m}{n}\right)-1=0$　　$m^3-nm^2-n^2m-n^3=0$

$m^3=n(m^2+nm+n^2)$　　m, n は互いに素より　$n=1$

このとき　$m^3-m^2-m-1=0$　より　$m(m^2-m-1)=1$　……①

m は整数より　$m=1$ または $m=-1$　であるが, このいずれも①を満たさない.

よって t は無理数である. したがって $r^3=t$ を満たす有理数 r は存在しない.

したがって示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　総合問題⑾

$\{a_n\}$ は，初項 $a_1=-1$，公差 d の等差数列で，$\{b_n\}$ は，初項 $b_1=2011$，公比 r の等比数列とする．ただし，$d\neq 0$，$r\neq 0$　とする．これらの数列が
$a_n b_{n-1}+3b_n a_{n-1}-2b_{n-1}=0$（$n\geqq 2$）を満たしている．次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項は　$a_n=$ ア $n-$ イ ，　$b_n=2011\cdot\left(-\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}\right)^{n-1}$ である．

(2)　$|b_n|<|a_n|$ となる最小の n の値は　$n=$ オ である．

(1)　$a_n=-1+(n-1)d$　　$b_n=2011\cdot r^{n-1}$

これらを　$a_n b_{n-1}+3b_n a_{n-1}-2b_{n-1}=0$　に代入すると，

$\{-1+(n-1)d\}\cdot 2011\cdot r^{n-2}+3\cdot 2011\cdot r^{n-1}\{-1+(n-2)d\}-2\cdot 2011\cdot r^{n-2}=0$

この両辺を　$2011\cdot r^{n-2}(\neq 0)$ で割ると

$-1+(n-1)d+3r\{-1+(n-2)d\}-2=0$

つまり　$(d+3dr)n+(-3-d-3r-6rd)=0$

これが　$n\geqq 2$　である全ての自然数 n で成立するのは

$d+3dr=0$　……①　　かつ　$-3-d-3r-6rd=0$　……②　のとき．

$d\neq 0$ より　①から　$1+3r=0$　　$r=-\dfrac{1}{3}$　　　このとき②より　$d=2$

したがって　$a_n=\mathbf{2}n-\mathbf{3}$，$b_n=2011\cdot\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{n-1}$

(2)　$n=1$ のとき　$a_1=-1$，$b_1=2011$　より　$|b_1|>|a_1|$

$n\geqq 2$ のとき　$|a_n|=|2n-3|=2n-3$

また　　$|b_n|=\left|2011\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right|=2011\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　$|b_n|<|a_n|$　より　$2011\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}<2n-3$　　つまり　$(2n-3)\cdot 3^{n-1}>2011$

$f(n)=(2n-3)\cdot 3^{n-1}$　とおくと，$f(n)$ は単調増加．

$f(2)=3$，　$f(3)=27$，　$f(4)=135$，　$f(5)=567$，　$f(6)=2187$

したがって，$|b_n|<|a_n|$ を満たす最小の n は　$n=\mathbf{6}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。